新冠核酸检测分析

kkew3

2022 年 12 月 12 日

摘要

本文分析新冠核酸单检/混检概率以及最优混检人数。

1 假设

1.1 变量

单检阳性概率 p

k**-混检阳性概率** q_k，$k \in \{k \in \mathbb{Z} \mid k > 1\}$

单检每人次费用 y_S

k**-混检每人次费用** $y_M(k)$

总人数 N

1.2 简化假设

1) 全部公费

2) 允许小数人次

3) k-混检一次阳性 = k-混检一次 + 单检 k 次

4) 混检为独立同分布随机抽样

5) $y_S/k \le y_M(k) \le y_S$

2 已知单检阳性概率，求混检阳性概率

根据假设 4，

$$q_k = 1 - (1-p)^k \tag{1}$$

3 最优混检人数

3.1 $y_M(k)$ 经验公式

令

$$y_M(k) = \frac{y_S(1+k^{-1})}{\lambda}$$

显然，该经验公式满足假设 5。拟合长沙市政府数据和衡阳市政府数据得 $\lambda = 5$，$y_S = 16$。

3.2 最小化问题

只需最小化总费用 Y 的期望。令 Y_k 为 k-混检一次导致的总费用；易知，$Y = N/k \cdot Y_k$。由此得优化问题：

$$\begin{aligned}
\hat{k} &= \arg\min_k \mathbb{E}[Y] = \arg\min_k \left(\frac{N}{k} \cdot \mathbb{E}[Y_k] \right) \\
&= \arg\min_k \left(\frac{1}{k} \cdot \begin{cases} y_S & (k=1) \\ q_k k (y_M(k) + y_S) + (1-q_k) k y_M(k) & (k>1) \end{cases} \right) \\
&= \arg\min_k \left(\begin{cases} y_S & (k=1) \\ q_k (y_M(k) + y_S) + (1-q_k) y_M(k) & (k>1) \end{cases} \right)
\end{aligned} \tag{2}$$

3.3 求解

假设十混一阳性概率 60%[1]（即单检阳性概率 8%），最优 $k = 2$。假设最优 $k = 10$，单检阳性概率则至多约为 0.2%（即十混一阳性概率至多 2%）。因此现阶段十混一检测有可能并不是最节省经费的方案。

[1]张文宏说的?